

BÀI TOÁN NP-ĐẦY ĐỦ CỦA TOÁN TỬ BAO ĐÓNG

Nguyễn Hoàng Sơn^{1*}, Trần Việt Khoa²

¹ Khoa Toán, Trường Đại học Khoa học, Đại học Huế

² Khoa CNTT, Trường Đại học Khoa học, Đại học Huế

* Email: nhson.math@gmail.com

Ngày nhận bài: 18/02/2021; ngày hoàn thành phản biện: 21/5/2021; ngày duyệt đăng: 02/6/2021

TÓM TẮT

Khóa tối thiểu và phản khóa là những khái niệm có vai trò quan trọng trong toán tử bao đóng. Bài báo giới thiệu về một bài toán tập không khóa của toán tử bao đóng. Bài toán này được bài báo chứng minh có độ phức tạp là NP-đầy đủ.

Từ khóa: Toán tử bao đóng, khóa tối thiểu, phản khóa.

1. MỞ ĐẦU

Toán tử bao đóng đã xuất hiện từ rất lâu trong toán cũng như toán ứng dụng. Tuy nhiên, gần 30 năm trở lại đây, toán tử bao đóng có nhiều ứng dụng quan trọng trong các lĩnh vực liên quan về dữ liệu như cơ sở dữ liệu, các hệ suy diễn, khai phá dữ liệu [1, 4, 6, 9]. Ngoài ra, các toán tử bao đóng này cũng có thể tìm thấy trong nhiều lý thuyết thời sự như siêu đồ thị, matroid, tập thô, tập mờ, trí tuệ nhân tạo, lý thuyết quyết định [3, 5, 8, 10].

Trong các vấn đề nghiên cứu về toán tử bao đóng thì khóa và phản khóa là được nhiều nhà nghiên cứu quan tâm nhất. Bài báo này cũng không ngoài mục đích đó. Trong bài báo này chúng tôi nghiên cứu độ phức tạp của bài toán xác định một tập cho trước có phải không khóa của toán tử bao đóng hay không.

Cấu trúc bài báo chia làm 4 phần, Sau phần mở đầu, phần thứ 2 giới thiệu khái niệm toán tử bao đóng và một số khái niệm, kết quả cơ sở liên quan. Phần thứ 3 chúng tôi giới thiệu và chứng minh một bài toán NP-đầy đủ về tập không khóa của toán tử bao đóng. Phần cuối cùng của bài báo là kết luận.

2. MỘT SỐ KHÁI NIỆM CƠ SỞ

Mục này nhắc lại một số khái niệm và kết quả cơ sở. Các định nghĩa và kết quả này có thể tìm thấy trong [1, 2, 10].

Cho U là một tập hữu hạn khác rỗng. Ký hiệu $P(U)$ là tập lũy thừa của U . Ánh xạ $L : P(U) \rightarrow P(U)$ thỏa các điều kiện sau:

$$(L1) \quad X \subseteq L(X)$$

$$(L2) \quad X \subseteq Y \Rightarrow L(X) \subseteq L(Y)$$

$$(L3) \quad L(L(X)) = L(X)$$

với mọi $X, Y \subseteq U$, được gọi là một *toán tử bao đóng* (TTBĐ) trên U . Ký hiệu $CL(U)$ là tập tất cả các TTBĐ trên U .

Xét TTBĐ $L \in CL(U)$ và $K \subseteq U$. Tập K được gọi là *khóa* của L nếu $L(K) = U$. Một khóa K được gọi là *tối thiểu* nếu với mọi $a \in K$ thì $L(K - a)^1$ không phải là một khóa. Ký hiệu tập tất cả khóa tối thiểu của L là $Key(L)$.

Một tập con $K^{-1} \subseteq U$ được gọi là *phản khóa* của L nếu $L(K^{-1}) \neq U$ và với mọi $a \in U - K^{-1}$ thì $L(K^{-1} \cup a) = U$. Ký hiệu $Antikey(L)$ là tập tất cả các phản khóa của L .

Mối quan hệ giữa khóa tối thiểu và phản khóa của TTBĐ như sau:

Mệnh đề 2.1. [9]

$$\cup Key(L) = U - \cap Antikey(L).$$

Ví dụ 2.1. Các ánh xạ sau là các TTBĐ cơ sở:

- 1) Ánh xạ tối đại $m : P(U) \rightarrow P(U)$ xác định bởi $m(X) = U$ với mọi $X \subseteq U$, và $Key(m) = \{\emptyset\}$, $Antikey(m) = \emptyset$.
- 2) Ánh xạ đồng nhất $i : P(U) \rightarrow P(U)$ cho bởi $i(X) = X$ với mọi $X \subseteq U$, và $Key(i) = \{U\}$, $Antikey(i) = \{U - a : a \in U\}$.
- 3) Ánh xạ tịnh tiến $t_M : P(U) \rightarrow P(U)$ xác định bởi $t_M(X) = M \cup X$ với M là tập con cho trước của U , $X \subseteq U$ và $Key(t_M) = \{U - M\}$, $Antikey(t_M) = \{U - a : a \in U - M\}$

3. KẾT QUẢ

Xét TTBĐ $L \in CL(U)$. Đặt $S = \{X : X \text{ không phải là một khóa của } L\}$. Như vậy, rõ ràng S là họ các tập không phải khóa của TTBĐ L . Từ định nghĩa phản khóa, suy ra $Antikey(L)$ cũng là họ các tập không phải khóa tối đại của L .

¹ Ký hiệu $X - a, X \cup a, X - Y$ tương ứng lần lượt thay cho $X \setminus \{a\}, X \cup \{a\}, X \setminus Y$ với mọi $X, Y \subseteq U$ và $a \in U$

Như chúng ta đã biết các tập không phải khóa tối đại đóng vai trò quan trọng trong nhiều bài toán thú vị của TTBD cũng như nhiều vấn đề liên quan khác. Trong mục này, chúng ta sẽ giới thiệu một bài toán NP-đầy đủ liên quan đến tập không khóa của TTBD. Bài toán này được mô tả như sau

Bài toán 3.1. (Bài toán không khóa của TTBD)

Dữ kiện: TTBD $L \in CL(U)$ và một số nguyên dương k sao cho $k \leq |U|$.

Câu hỏi: Có tồn tại một tập $X \in \mathcal{S}$ sao cho $k \leq |X|$?

Để chứng minh tính NP-đầy đủ của Bài toán 3.1, chúng ta sẽ sử dụng *Bài toán NP-đầy đủ tập độc lập* đã biết sau

Bài toán 3.2. [7] (Bài toán tập độc lập)

Dữ kiện: Một số nguyên dương k và một đồ thị vô hướng $G = (V, E)$ với V là tập các đỉnh và E là tập các cạnh.

Câu hỏi: Có tồn tại một tập độc lập I sao cho $k \leq |I|$?

Định lý 3.1. *Bài toán 3.1 là NP-đầy đủ.*

Chứng minh.

Để thấy Bài toán 3.1 thuộc lớp NP, vì tồn tại thuật toán không đơn định giải Bài toán 3.1 như sau:

- Sinh một tập con $X \subseteq U$ sao cho $|X| \geq k$ một cách không đơn định.
- Kiểm tra trong thời gian đa thức X có phải là tập không khóa của TTBD L hay không.

Bây giờ chúng ta sẽ chứng minh Bài toán 3.2 quy dẫn đa thức về Bài toán 3.1. Thật vậy, xét đồ thị vô hướng $G = (V, E)$ với $k \leq |V|$. Ta xây dựng ánh xạ $f : P(U) \rightarrow P(U)$ như sau:

$$f(X) = \begin{cases} V & \text{nếu } X = \{u, v\} \in E \\ X & \text{ngược lại} \end{cases}$$

ở đây $U = V$. Chú ý rằng với mỗi $X \notin E$ ta có $f(X) = X$. Để thấy $f \in CL(U)$ và f được xây dựng trong thời gian đa thức theo kích thước của G .

Theo định nghĩa đồ thị, rõ ràng E là một siêu đồ thị đơn trên V . Từ định nghĩa khóa tối thiểu và TTBD f được xây dựng như trên, ta có $\text{Key}(f) = E$. Do đó, có thể thấy X không phải một khóa của f nếu và chỉ nếu $\{u, v\} \notin X$ với mọi $\{u, v\} \in E$. Vậy, X không phải khóa của f nếu và chỉ nếu X là một tập độc lập của G .

4. KẾT LUẬN

Như vậy, bài báo đã giới thiệu bài toán không khóa của TTBD, và chứng minh được bài toán này có độ phức tạp là NP-đầy đủ. Điều này có nghĩa rằng bài toán không khóa của TTBD là bài toán rất khó, không có thuật toán đa thức giải bài toán này nếu $NP \neq P$.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1]. W. W. Armstrong, *Dependency structures of database relationships*, Information processing 74 (1974), 580-583.
- [2]. F. E. Bennett, Li Sheng Wu, *On minimum matrix representation of closure operations*, Discrete Applied Mathematics, 26 (1990) 25-40.
- [3]. C. Berge, *Hypergraphs: combinatorics of finite sets*, North-Holland, Amsterdam, 1989.
- [4]. G. Burosch, J. Demetrovics, G. O. H. Katona (1987), *The poset of closures as a model of changing databases*, Order, 127-142.
- [5]. N. Caspard, B. Monjardet, *The lattices of closure systems, closure operators, and implicational systems on a finite set: a survey*, Discrete Applied Mathematics, 127 (2003) 241-269.
- [6]. J. Demetrovics, G. Hencsey, L. Libkin, I. Muchnik, *On the interaction between closure operations and choice functions with applications to relational databases*, Acta Cybernetica, 10 (1992) 129-139.
- [7]. M. R. Garey, D. S. Johnson, *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*, A Series of Books in the Mathematical Sciences, W. H. Freeman and Company, San Francisco, 1979.
- [8]. H. Mao, S. Liu, *Posets and closure operators relative to matroids*, Matematika, (2012) 77-85.
- [9]. Nguyen Hoang Son, Vu Duc Thi, *Some the combinatorial characteristics of closure operations*, Algebra and Discrete Mathematics, 28 (2019) 144-156.
- [10]. Z. Pawlak, *Rough sets-Theoretical aspects of reasoning about data*, Kluwer Academic Publishers, The Netherlands, 1991.

NP-COMPLETE PROBLEM OF CLOSURE OPERATIONS

Nguyen Hoang Son^{1*}, Tran Viet Khoa²¹ Faculty of Mathematics, University of Sciences, Hue University² Faculty of Information Technology, University of Sciences, Hue University

* Email: nhson.math@gmail.com

ABSTRACT

Minimal keys and antikeys that are concepts play an important role in the closure operations. The paper presents a problem about the nonkey set of the closure operations. The paper proves that this problem has NP-complete complexity.

Keywords: antikey, closure operations, minimal key.



Nguyễn Hoàng Sơn sinh ngày 28/06/1973 tại Thừa Thiên Huế. Năm 1995, ông tốt nghiệp đại học ngành Toán - Tin tại Trường Đại học Tổng hợp Huế. Ông nhận bằng thạc sỹ Tin học tại Trường Đại học Bách khoa Hà Nội năm 1998, và nhận học vị Tiến sĩ chuyên ngành Đảm bảo toán học cho máy tính và hệ thống tính toán tại Viện Công nghệ Thông Tin, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam năm 2006. Hiện ông công tác tại Trường Đại học Khoa học, Đại học Huế.

Lĩnh vực nghiên cứu: Khoa học dữ liệu, toán rời rạc, lý thuyết độ phức tạp tính toán.



Trần Việt Khoa sinh ngày 19/06/1972 tại Thanh Hóa. Tốt nghiệp đại học Tổng hợp Huế năm 1995 chuyên ngành Toán-Tin. Ông nhận bằng thạc sỹ Tin học năm 2005 tại Trường Đại học Khoa học, Đại học Huế. Hiện nay công tác tại Khoa Công nghệ Thông tin, trường Đại học Khoa học, Đại học Huế.

Lĩnh vực nghiên cứu: Toán học rời rạc, cấu trúc dữ liệu và giải thuật, các hệ quản trị cơ sở dữ liệu.

