TẠP CHÍ KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ, Trường Đại học Khoa học, ĐH Huế
Tập 26, Số 1 (2024)

A REVERSE INEQUALITY FOR THE WEIGHTED AM-GM INEQUALITY

Hoa Binh T.Du[1], Ai Nhan D.Nguyen[2,3,4*], Du Thai Nguyen[4], Thuy Nga T.Dang[4]

[1] Department of Management and Tourism, Hanoi University

[2] Faculty of Mathematics and Computer Science, University of Science, HCM City

[3] Vietnam National University, HCM City

[4] Department of Mathematics, University of Sciences, Hue University

*Email: nguyenduyainhan@husc.edu.vn

Received: 5/8/2024; Received in revised form: 12/8/2024; Accepted: 01/11/2024

ABSTRACT

This paper presents a reverse inequality for the matrix version of the weighted Arithmetic Mean - Geometric Mean (AM-GM) inequality. More precisely, for $t \in (0,1)$, $0 < mI_n \le A, B \le MI_n$, where m, M are two positive real numbers, we prove that

$$A\nabla_t B \le \max\left\{\frac{(1-t)+th}{h^t}, \frac{(1-t)h+t}{h^{1-t}}\right\} A\#_t B,$$

where $\#_t$, ∇_t are the weighted geometric mean and the weighted arithmetic mean, respectively, and $h = \frac{M}{m}$.

Keywords: Matrix mean, arithmetic mean, geometric mean, reverse inequality, representing functions.

1. INTRODUCTION

Let $\mathbb{M}_n$ stand for the algebra of $n \times n$ complex matrices and let $\mathbb{P}_n$ denote the set of positive definite matrices in $\mathbb{M}_n$. Let f be a real-valued function which is well-defined on the set of eigenvalues of a Hermitian matrix A. Then the matrix $f(A)$ can be defined by means of the functional calculus.

In 1980, Kubo and Ando [1] introduced the theory of operator means. The main result in their paper is the one-to-one correspondence between operator means σ and operator monotone functions f_σ on $(0, \infty)$ defined by

$$A\sigma B = A^{\frac{1}{2}} f_\sigma\left(A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}}\right) A^{\frac{1}{2}}. \quad (1)$$

Beside that, the authors also identified that the arithmetic mean and the harmonic mean are the largest and smallest elements, respectively, in the set of symmetric matrix means according to the order relation $\leq$, defined by $\sigma \leq \tau$ if and only if $0 \leq \tau - \sigma$. From this result, we can easily obtain the inequality between the Arithmetic Mean ∇ and the Geometric Mean #: for two positive definite matrices A and B, we have

$$A\nabla B \geq A\# B, \tag{2}$$

where $A\nabla B = \frac{A+B}{2}$ and $A\# B = A^{\frac{1}{2}}\left(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}}$. In case of scalar, we have familiar inequality $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ for all positive real numbers a, b.

In 2006, Fujii and his co-authors [2] demonstrated that for $0 < mI_n \leq A, B \leq MI_n$ and σ is a symmetric mean, then

$$A\nabla B \leq \frac{m\nabla M}{m\sigma M} A\sigma B.$$

Hence, we have

$$A\nabla B \leq \frac{1+h}{2\sqrt{h}} A\# B, \tag{3}$$

where $h = \frac{M}{m}$. This is a reverse inequality of (2).

In [3-5], the authors considered the problem of reversing some inequalities that involve matrix means by using Kantorovich constant $K(h) = \frac{(1+h)^2}{4h}$ and obtained some interesting results. Note that if we consider the quantity $\frac{1+h}{2\sqrt{h}}$ and Kantorovich constant $K(h)$ in relation to the representing function of matrix means, we find that $\frac{1+h}{2\sqrt{h}}$ is the ratio of the representing function of the arithmetic mean to the geometric mean, while the Kantorovich constant is the ratio of the representing function of the largest symmetric matrix mean to the smallest one.

In some special cases we have the weighted matrix means. For example, the weighted means of arithmetic, geometric, and harmonic means are $A\nabla_t B = (1-t)A + tB$, $A\#_t B = A^{\frac{1}{2}}\left(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}\right)^{t}A^{\frac{1}{2}}$, and $A!_t B = \left((1-t)A^{-1} + tB^{-1}\right)^{-1}$, respectively, where $t \in [0,1]$. Although Kubo-Ando theory characterizes all possible matrix means, it does not clarify how weighted means correspond to symmetric ones. In 2013, Pálfia [6] defined a procedure for every symmetric matrix mean σ and introduced the weighted mean associated with a symmetric mean σ, denoted by σ_t for all $t \in [0,1]$. He also proved the weighted AM-GM inequality as follows:

$$A\nabla_t B \geq A\#_t B \tag{4}$$

for all $t \in [0,1]$ and $A, B \in \mathbb{P}_n$.

In this paper, we reverse the inequality (4) by using a value calculated from the representing functions of weighted means and consider some related inequalities.

2. PRELIMINARIES

Definition 1 ([1]). A binary operator $\sigma: \mathbb{P}_n \times \mathbb{P}_n \to \mathbb{P}_n, (A, B) \mapsto A\sigma B$, is called a mean, or a Kubo-Ando mean, if the following requirements are fullfilled:

(i) $A \leq C$ and $B \leq D$ imply $A\sigma B \leq C\sigma D$.

(ii) $C(A\sigma B)C \leq (CAC)\sigma(CBC)$.

(iii) $A_k \downarrow A$ and $B_k \downarrow B$ imply $(A_k\sigma B_k) \downarrow A\sigma B$.

(iv) $I_n\sigma I_n = I_n$ for identity matrix I_n.

A mean is **symmetric** if $A\sigma B = B\sigma A$.

Three well-known symmetric means are the arithmetic mean, harmonic mean, and geometric mean, denoted by $\nabla, !$ and $\#$, respectively. Their formulas are as follows:

$$A\nabla B = \frac{A+B}{2}, \quad A \,!\, B = 2\,(A^{-1} + B^{-1})^{-1}, \quad A\#B = A^{\frac{1}{2}}\left(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}}.$$

Theorem 2 ([1]). *Let σ be a Kubo-Ando mean. Then exists an operator monotone function f_σ on $(0, \infty)$ such that $f_\sigma(1) = 1$ and $A\sigma B = A^{\frac{1}{2}}f_\sigma\left(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}\right)A^{\frac{1}{2}}$ for all $A, B \in \mathbb{P}_n$. The function f_σ is called the representing function of σ.*

The representing function of arithmetic mean ∇ is $f_\nabla(x) = \frac{x+1}{2}$ while that of harmonic mean is $f_!(x) = \frac{2x}{1+x}$, and the representing function of geometric mean $\#$ is $f_\#(x) = x^{\frac{1}{2}}$.

Theorem 3 ([1]). *Arithmetic mean is the maximum of all symmetric means while harmonic mean is the minimum.*

In [6], the author defined a procedure for every symmetric matrix mean σ as follows:

Definition 4 ([6]). Let σ be a symmetric matrix mean, $A, B \in \mathbb{P}_n$ and $t \in [0, 1]$. Let $a_0 = 0$, $b_0 = 1$, $A_0 = A$, $B_0 = B$. Define a_m, b_m, A_m, B_m recursively by the following procedure for all $m = 0, 1, 2, \ldots$:

if $a_m = t$ then

$a_{m+1} = a_m$ and $b_{m+1} = a_m$, $A_{m+1} = A_m$ and $B_{m+1} = A_m$

else if $b_m = t$ then

$a_{m+1} = b_m$ and $b_{m+1} = b_m$, $A_{m+1} = B_m$ and $B_{m+1} = B_m$

else if $\frac{a_m+b_m}{2} \leq t$ then

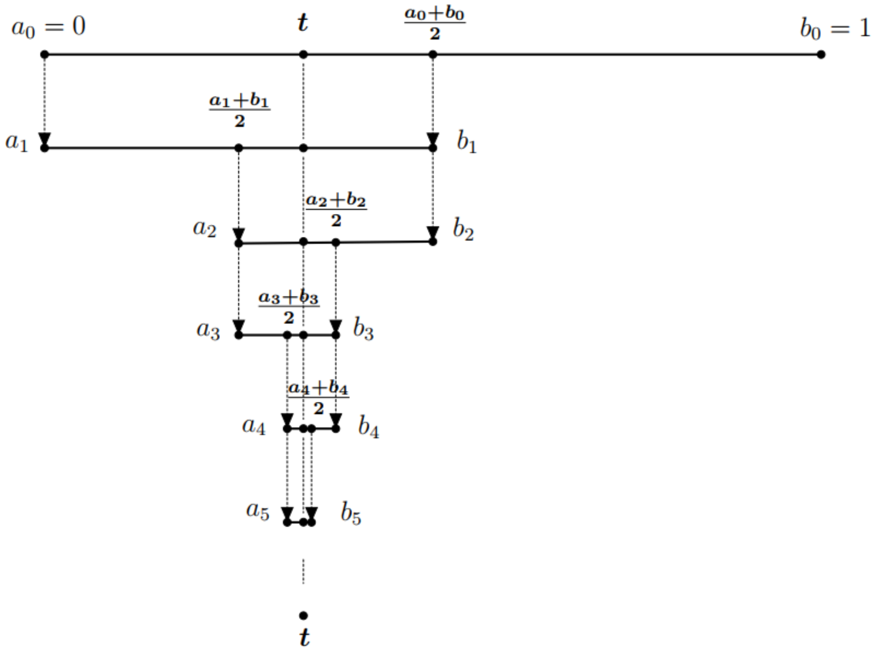
$a_{m+1} = \frac{a_m+b_m}{2}$ and $b_{m+1} = b_m$, $A_{m+1} = A_m \sigma B_m$ and $B_{m+1} = B_m$

else

$b_{m+1} = \frac{a_m+b_m}{2}$ and $a_{m+1} = a_m$, $B_{m+1} = A_m \sigma B_m$ and $A_{m+1} = A_m$

end if

The following figure illustrates the procedure described above.



Theorem 5 ([6]). *The sequences A_m, B_m given in Definition 4 are convergent and have the same limits point.*

Definition 6 ([6]). The common limit point of A_m, B_m in Theorem 5 will be denoted by $A\sigma_t B$ and it is considered as the corresponding weighted mean to a symmetric matrix mean σ.

Proposition 7 ([6]). *$A\sigma_t B$ yields the correct corresponding weighted means in the case of the arithmetic, geometric, harmonic means. More precisely, we have*

$$A \nabla_t B = (1-t)A + tB, \quad A \#_t B = A^{\frac{1}{2}} \left(A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}} \right)^t A^{\frac{1}{2}}, \quad A !_t B = \left((1-t)A^{-1} + tB^{-1} \right)^{-1}.$$

Corollary 8 ([6]). *For every symmetric matrix mean σ, there is a corresponding one parameter family of weighted means σ_t for $t \in [0,1]$. Let $f_\sigma(x)$ be the normalized operator monotone* *function corresponding to σ. Then, similarly we have a one parameter family of normalized operator monotone functions $f_{\sigma_t}(x)$ corresponding to σ_t.*

3. MAIN RESULTS

Let consider the weighted mean σ_t corresponding to a symmetric matrix mean σ, where $t \in [0,1]$ and $f_{\sigma_t}(x)$ denoted by the representing function of σ_t. We have $f_{\sigma_0}(x) = 1$ and $f_{\sigma_1}(x) = x$, so we can consider $t \in (0,1)$.

In next theorem, we generalize the inequality (3) and reverse the inequality (4) for the case of $\#_t$ and ∇_t, where $t \in (0,1)$.

Theorem 9. *For $t \in (0,1)$, $0 < mI_n \le A, B \le MI_n$ where m, M are two positive real numbers, let $h = \frac{M}{m}$ we have*

$$A\nabla_t B \le \max\left\{\frac{(1-t)+th}{h^t}, \frac{(1-t)h+t}{h^{1-t}}\right\} A\#_t B, \tag{5}$$

where ∇_t and $\#_t$ are weighted arithmetic mean and weighted geometric mean, respectively.

Proof.

We have the representing functions of $\#_t$ and ∇_t are x^t and $(1-t)+tx$, respectively.

We consider the function $g(x) = \frac{(1-t)+tx}{x^t}$. The variation table for this function on $\left[\frac{1}{h}, h\right]$ is as follows:

x	$\frac{1}{h}$		1		h
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$g\left(\frac{1}{h}\right)$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$g(h)$

Thus, $\max\limits_{\left[\frac{1}{h},h\right]} g(x) = \max\left\{g\left(\frac{1}{h}\right), g(h)\right\} = \max\left\{\frac{(1-t)+th}{h^t}, \frac{(1-t)h+t}{h^{1-t}}\right\}$ and hence

$$f_{\nabla_t}(x) \le \max\left\{\frac{(1-t)+th}{h^t}, \frac{(1-t)h+t}{h^{1-t}}\right\} f_{\#_t}(x)$$

for all $x \in \left[\frac{1}{h}, h\right]$.

Since $\frac{1}{h} I_n \le A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}} \le hI_n$, we have

$$f_{\nabla_t}\left(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}\right) \leq \max\left\{\frac{(1-t)+th}{h^t}, \frac{(1-t)h+t}{h^{1-t}}\right\} f_{\#_t}\left(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}\right)$$

and hence

$$\begin{aligned} A\nabla_t B &= A^{\frac{1}{2}} f_{\nabla_t}\left(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}\right)A^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \max\left\{\frac{(1-t)+th}{h^t}, \frac{(1-t)h+t}{h^{1-t}}\right\} A^{\frac{1}{2}} f_{\#_t}\left(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}\right)A^{\frac{1}{2}} \\ &= \max\left\{\frac{(1-t)+th}{h^t}, \frac{(1-t)h+t}{h^{1-t}}\right\} A\#_t B. \end{aligned}$$

□

For $t \in (0,1)$, let $K_{t,h} = \max\left\{\frac{(1-t)+th}{h^t}, \frac{(1-t)h+t}{h^{1-t}}\right\}$. By using the properties of a positive unital linear map and the properties of a mean, we can derive the following corollary:

Corollary 10. *Let* $0 < mI_n \leq A, B \leq MI_n$ *and let* Φ *be a positive unital linear map, we have:*

(1) $\Phi(A\nabla_t B) \leq K_{t,h}\Phi(A\#_t B)$.

(2) $\Phi(A\nabla_t B) \leq K_{t,h}(\Phi(A)\#_t\Phi(B))$.

Remark. In case $t = \frac{1}{2}$, we have $\#_{\frac{1}{2}} = \#$, $\nabla_{\frac{1}{2}} = \nabla$ and the inequality (5) is exactly the inequality (3).

4. CONCLUSION

By utilizing the properties of the representing functions of matrix means, this paper presents a reverse inequality of the weighted AM-GM inequality. The generalization of this result to cases involving two other weighted means remains an open question and is the focus of our future research.

ACKNOWLEDGEMENT

This paper is sponsored by Hue University under Grant No. DHH2024-01-219.

REFERENCES

[1]. F. Kubo, T. Ando (1980). Means of positive linear operators, *Math. Ann*, 246, 205-224.

[2]. J. I. Fujii, M. Nakamura, J. Pečarić, Y. Seo (2006). Bounds for the ratio and difference between parallel sum andseries via Mond- Pečarić method, *Math. Inequal. Appl.*, 9, 4, 749-759.

[3]. M. Lin (2013). Squaring a reverse AM-GM inequality, *Studia Math*, 215, 187- 194.

[4]. D.T. Hoa, D.T.H. Binh, H.M. Toan (2017). On some matrix mean inequalities with Kantorovich constant, *Sci. Math. Jpn*, 80, 2, 139-151.

[5]. M. Sababheh, H. R. Moradi, I. H. Gümüş, S. Furuichi (2023). A note on Kantorovich and Ando inequalites, *Filomat*, 37, 13, 4171-4183.

[6]. M. Pálfia (2013). Weighted matrix means and symmetrization procedures. *Linear Algebra and its Applications*, 438, 1746-1768.

MỘT BẤT ĐẲNG THỨC NGƯỢC CỦA BẤT ĐẲNG THỨC TRUNG BÌNH CỘNG-TRUNG BÌNH NHÂN CÓ TRỌNG SỐ

Dư Thị Hòa Bình[1], Nguyễn Duy Ái Nhân[2,3,4*], Nguyễn Dư Thái[4], Đặng Thị Thúy Nga[4]

[1] Khoa Quản trị và Du lịch, Trường Đại học Hà Nội

[2] Khoa Toán và Tin học, Trường Đại học Khoa học tự nhiên Thành phố Hồ Chí Minh

[3] Đại học Quốc gia Thành phố Hồ Chí Minh

[4] Khoa Toán, Trường Đại học Khoa học, Đại họcHuế

*Email: nguyenduyainhan@husc.edu.vn

TÓM TẮT

Bài báo này giới thiệu một bất đẳng thức ngược của bất đẳng thức Trung bình cộng-Trung bình nhân có trọng số dạng ma trận. Cụ thể, với $t \in (0,1)$, $0 < mI_n \leq A, B \leq MI_n$ với m, M là hai số thực dương, bài báo chỉ ra rằng

$$A\nabla_t B \leq \max\left\{\frac{(1-t)+th}{h^t}, \frac{(1-t)h+t}{h^{1-t}}\right\} A\#_t B,$$

trong đó $\#_t$, ∇_t lần lượt là trung bình nhân có trọng số và trung bình cộng có trọng số và $h = \frac{M}{m}$.

Từ khóa: Trung bình ma trận, trung bình cộng, trung bình nhân, bất đẳng thức ngược, hàm biểu diễn.

Dư Thị Hòa Bình sinh ngày 26/3/1983 tại Hà Nội. Cô tốt nghiệp cử nhân ngành Toán năm 2001 và thạc sỹ chuyên ngành Đại số và Lý thuyết số năm 2008 tại Trường Đại học Khoa học Tự Nhiên, Đại học Quốc gia Hà Nội; nhận học vị tiến sĩ năm 2019 tại Đại học Quy Nhơn. Cô công tác tại Khoa Quản trị kinh doanh và Du lịch, trường Đại học Hà Nội từ năm 2020.

Lĩnh vực nghiên cứu: Giải tích ma trận, Hình học đại số thực.

Nguyễn Duy Ái Nhân sinh ngày 22/07/1989 tại Thừa Thiên Huế. Năm 2011, cô tốt nghiệp cử nhân ngành Sư phạm Toán tại Trường Đại học Sư phạm, ĐH Huế. Năm 2013, cô tốt nghiệp thạc sĩ chuyên ngành Đại số và Lý thuyết số tại Trường Đại học Sư phạm, ĐH Huế. Hiện nay, cô giảng dạy tại Trường Đại học Khoa học, ĐH Huế.

Lĩnh vực nghiên cứu: Đại số và Lý thuyết số.

Nguyễn Dư Thái sinh ngày 02/07/1982 tại Quảng Trị. Ông tốt nghiệp cử nhân chuyên ngành Toán học tại trường Đại học Khoa học, ĐH Huế năm 2005, tốt nghiệp thạc sĩ chuyên ngành Giải tích năm 2008 tại trường Đại học Khoa học, ĐHH Huế. Ông công tác tại Khoa Toán, trường Đại học Khoa học, Đại học Huế từ năm 2006.

Lĩnh vực nghiên cứu: Giải tích.

Đặng Thị Thúy Nga sinh ngày 14/10/2000 tại Gia Lai. Cô tốt nghiệp cử nhân chuyên ngành Sư phạm Toán học tại trường Đại học Sư phạm Hà Nội năm 2022. Cô công tác tại trường THPT Chi Lăng – Gia Lai từ năm 2022.

Lĩnh vực nghiên cứu: Đại số.