

NGHIÊN CỨU ĐẶC TÍNH RỐI VÀ LÁI LƯỢNG TỬ DỰA TRÊN TRẠNG THÁI KẾT HỢP CẶP BẰNG PHƯƠNG PHÁP THÊM HAI CẶP PHOTON

Hồ Sỹ Chương^{1*}, Nguyễn Phương Uyên¹, Nguyễn Thị Thu Thủy¹,
Lê Thị Hồng Thanh², Trương Minh Đức³

¹Trường Đại học Đồng Nai

²Trường Đại học Quảng Nam

³Trường Đại học Sư phạm, Đại học Huế

*Email: hosichuong@gmail.com

Ngày nhận bài: 5/10/2025; ngày hoàn thành phản biện: 8/10/2025; ngày duyệt đăng: 01/11/2025

TÓM TẮT

Trong nghiên cứu này, chúng tôi sử dụng phương pháp thêm hai cặp photon lên hai mode của trạng thái kết hợp cặp (PCS) để thu được trạng thái kết hợp cặp thêm hai cặp photon (TPPA-PCS). Để nghiên cứu đặc tính đan rối, tiêu chuẩn đan rối Hillery đã được áp dụng. Kết quả cho thấy TPPA-PCS là trạng thái bị rối khi biên độ kết hợp không quá nhỏ. Tính chất lái lượng tử của TPPA-PCS cũng được khảo sát chi tiết. Các kết quả chỉ ra rằng TPPA-PCS có tính chất lái lượng tử theo điều kiện lái Cavalcanti, đồng thời thể hiện tính chất mode a lái được mode b theo điều kiện lái lượng tử EPR.

Từ khóa: Lái lượng tử, Rối lượng tử, Trạng thái kết hợp cặp, Trạng thái kết hợp cặp thêm hai cặp photon.

1. MỞ ĐẦU

Đan rối và lái lượng tử đã được thảo luận từ năm 1935 bởi Einstein, Podolsky, Rosen [1, 2] và Schrödinger, các khái niệm này đã nói lên mối liên hệ đặc biệt giữa tọa độ và xung lượng của chúng. Ban đầu hai đặc tính này được cho là vi phạm nguyên lý bất định Heisenberg, nhưng về sau các thực nghiệm đã chứng tỏ sự tồn tại của chúng. Các trạng thái có tính chất đan rối, lái lượng tử có tiềm năng áp dụng vào các lĩnh vực như tính toán lượng tử, thông tin lượng tử, viễn tải lượng tử.

Việc xác định trạng thái đan rối là nhiệm vụ quan trọng trong việc tìm ra các nguồn rối phục vụ cho các nhiệm vụ lượng tử. Để làm được điều đó cần có các tiêu chuẩn cụ thể. Bất đẳng thức Bell, từng là thước đo chính, nay được nhận định là chưa

đủ. Các nhà khoa học đã liên tục phát triển những tiêu chí chặt chẽ hơn: từ điều kiện cần và đủ của Horodecki [3] cho các hệ nhỏ, đến phương pháp dựa trên ma trận mật độ của Peres [4], hay tiêu chuẩn chuyển vị từng phần dương của Pawel Horodecki [5]. Các nghiên cứu còn mở rộng khám phá các trạng thái vi phạm hệ thức bất định cục bộ, với những đóng góp quan trọng từ Van Loock và S. L. Braunstein [6], Hillery và Zubairy [7], Nha và Kim [8].

Lái lượng tử, dù ra đời cùng lúc với đan rối, nhưng ít được quan tâm do lầm tưởng rối và lái lượng tử là một. Tuy nhiên, công trình của Werner (1989) và Bowen (2003) [9] đã minh chứng rằng không phải mọi trạng thái đan rối đều mang tính lái. Phát hiện này đã thúc đẩy Wiseman, Jones và Doherty [10] đưa ra các định nghĩa toán tử chuẩn xác cho cả đan rối, lái và bất định xứ Bell vào các năm 2006 và 2007. Nhờ đó, việc tìm kiếm điều kiện cho trạng thái lái lượng tử đã trở thành một trọng tâm nghiên cứu mới mẻ và đầy hứa hẹn như Cavalcanti và các cộng sự [11], Kalaga và Leonski [12].

Trạng thái kết hợp cặp (PCS) được Agarwal [13] tìm ra từ thực nghiệm và giới thiệu vào năm 1986, xuất phát từ việc ông nhận thấy các photon thường được tạo ra hoặc hủy đi theo cặp trong các vấn đề quang phi tuyến. Trạng thái này có nhiều tính chất phi cổ điển đáng chú ý [13,14]. Việc thêm hoặc bớt photon vào PCS giúp tạo ra các trạng thái mới với tính chất phi cổ điển được tăng cường, mở ra nhiều ứng dụng tiềm năng trong thông tin và điều khiển lượng tử [15]. Đó là trạng thái riêng của toán tử hủy cặp photon $\hat{a}\hat{b}$ và toán tử $Q = \hat{a}^\dagger\hat{a} - \hat{b}^\dagger\hat{b}$, được biểu diễn như sau:

$$\hat{a}\hat{b}|\xi, q\rangle = \xi|\xi, q\rangle; \quad (1)$$

$$(\hat{a}^\dagger\hat{a} - \hat{b}^\dagger\hat{b})|\xi, q\rangle = q|\xi, q\rangle, \quad (2)$$

trong đó $\hat{a}^\dagger$, $\hat{a}$, $\hat{b}^\dagger$, $\hat{b}$ lần lượt là toán tử sinh, hủy mode a và mode b ; $|\xi, q\rangle$ là trạng thái kết hợp cặp; q là tham số suy biến chỉ sự khác nhau về số photon giữa hai mode của trường. (PCS) được khai triển theo các trạng thái Fock dưới dạng:

$$|\xi, q\rangle_{ab} = A_q \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^n}{\sqrt{n!(n+q)!}} |n, n+q\rangle_{ab}, \quad (3)$$

trong đó, ξ là số phức và có dạng $\xi = r.e^{i\phi}$; r là biên độ kết hợp, ϕ là tham số pha ($\phi \in \mathbb{R}$) và A_q là hệ số chuẩn hoá được xác định bởi:

$$A_q = \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\xi|^{2n}}{n!(n+q)!} \right]^{-\frac{1}{2}}. \quad (4)$$

2. TRẠNG THÁI HAI MODE KẾT HỢP CẶP THÊM HAI CẶP PHOTON

Kỹ thuật thêm, bớt photon thường được sử dụng để làm thay đổi trạng thái đơn hoặc đa mode ban đầu, trong đó có PCS, nhằm thu được các trạng thái mới có các tính chất phi cổ điển bị thay đổi mạnh. Nhiều nghiên cứu chỉ ra kỹ thuật này có thể được sử dụng để tăng cường các tính chất phi cổ điển như tính chất nén, tính chất phản kết chùm, tính chất phân bố phi Gauss, tính chất thống kê sub-Poisson và đặc biệt là tính chất đan rối của PCS [15-21].

Để xây dựng trạng thái hai mode kết hợp cặp thêm hai cặp photon, toán tử sinh bậc hai được sử dụng để tác dụng lên từng mode a và b của trạng thái kết hợp cặp. Trạng thái mới, ký hiệu là $|\Phi\rangle_{ab}$, được biểu diễn như sau:

$$|\Phi\rangle_{ab} = B_q a^{\dagger 2} b^{\dagger 2} |\xi, q\rangle_{ab}, \quad (5)$$

trong đó B_q là hệ số chuẩn hóa của TPPA-PCS.

Bằng cách thay PCS ở (3) vào (5) và tính toán, thu được dạng TPPA-PCS như sau:

$$|\Phi\rangle_{ab} = B_q A_q \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^n \sqrt{(n+2)!} \sqrt{(n+q+2)!}}{n!(n+q)!} |n+2, n+q+2\rangle. \quad (6)$$

Từ điều kiện chuẩn hóa đối với TPPA-PCS, hệ số chuẩn hóa B_q được xác định

$$B_q = \left[A_q^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\xi|^{2n} (n+2)!(n+q+2)!}{(n!)^2 [(n+q)!]^2} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (7)$$

Để thuận tiện cho việc nghiên cứu tính chất đan rối và lái lượng tử, một số đại lượng liên quan đến trị trung bình của TPPA-PCS bao gồm $\langle N_a N_b \rangle$, $|\langle ab \rangle|^2$, $\langle N_a \rangle$, $\langle N_b \rangle$ và $\langle N_a \rangle \langle N_b \rangle$ đã được xác định như sau:

$$\langle N_a N_b \rangle = B_q^2 A_q^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\xi|^{2n} (n+1)(n+2)^2 (n+q+1)(n+q+2)^2}{n!(n+q)!}; \quad (8)$$

$$|\langle ab \rangle|^2 = B_q^4 A_q^4 \left[\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\xi^{2m+1} (m+2)(m+3)(m+q+2)(m+q+3)}{m!(m+q)!} \right]^2; \quad (9)$$

$$\langle N_a \rangle = B_q^2 A_q^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\xi|^{2n} (n+1)(n+2)^2 (n+q+1)(n+q+2)}{n!(n+q)!}; \quad (10)$$

$$\langle N_b \rangle = B_q^2 A_q^2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{|\xi|^{2m} (m+1)(m+2)(m+q+1)(m+q+2)^2}{m!(m+q)!}; \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \langle N_a \rangle \langle N_b \rangle = B_q^4 A_q^4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\xi|^{2n} (n+1)(n+2)^2 (n+q+1)(n+q+2)}{n!(n+q)!} \\ \times \sum_{m=0}^{\infty} \frac{|\xi|^{2m} (m+1)(m+2)(m+q+1)(m+q+2)^2}{m!(m+q)!}. \end{aligned} \quad (12)$$

3. TÍNH CHẤT RỐI LƯỢNG TỬ

Rối lượng tử (Quantum Entanglement) là một hiện tượng đặc trưng của cơ học lượng tử, nơi trạng thái của hai hay nhiều hạt trở nên liên kết chặt chẽ với nhau một cách phi cổ điển. Khi trạng thái của một hạt trong cặp bị rối được đo, trạng thái của các hạt còn lại sẽ được xác định ngay lập tức, bất kể khoảng cách giữa chúng.

Để xác định tính đan rối của trạng thái hai mode kết hợp cặp thêm hai cặp photon, nghiên cứu này áp dụng hai điều kiện đan rối của Hillery và Zubairy [7].

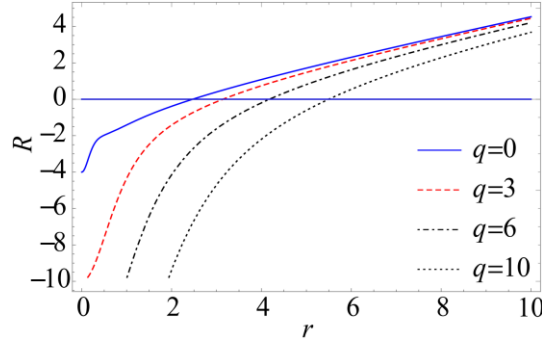
Điều kiện :

$$R = |\langle ab \rangle|^2 - \langle N_a \rangle \langle N_b \rangle > 0. \quad (13)$$

Một trạng thái được gọi là đan rối nếu thỏa mãn điều kiện này. Hàm R được xác định bằng cách thay các số hạng ở (9), (12) vào (13). Kết quả thu được:

$$\begin{aligned} R &= |\langle ab \rangle|^2 - \langle N_a \rangle \langle N_b \rangle \\ &= B_q^4 A_q^4 \left[\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\xi^{2m+1} (m+2)(m+3)(m+q+2)(m+q+3)}{m!(m+q)!} \right]^2 \\ &\quad - B_q^4 A_q^4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\xi|^{2n} (n+1)(n+2)^2 (n+q+1)(n+q+2)}{n!(n+q)!} \\ &\quad \times \sum_{m=0}^{\infty} \frac{|\xi|^{2m} (m+1)(m+2)(m+q+1)(m+q+2)^2}{m!(m+q)!}. \end{aligned} \quad (14)$$

Kết quả khảo sát tính chất đan rối của trạng thái hai mode kết hợp cặp thêm hai cặp photon dựa vào hàm R được cho trong hình 1.



Hình 1. Đồ thị hàm R theo r với giá trị q lần lượt là 0; 3; 6; 10.

Sự phụ thuộc đan rối của hình 1 được xét trong khoảng $0 < r \leq 10$ với các giá trị q tăng dần tương ứng $q = 0$ ứng với đường liền nét, $q = 3$ ứng với đường đứt nét, $q = 6$ ứng với đường gạch chấm, $q = 10$ ứng với đường chấm. Từ đồ thị ta thấy, ứng với $q = 0$, khi $r < 2,48$ đồ thị không có tính đan rối, tuy nhiên khi $r > 2,48$ tính chất đan rối xuất hiện. Từ đó ta nhận thấy rằng khi q càng nhỏ, tính chất đan rối xuất hiện trong miền r càng rộng. Hơn nữa khi r càng tăng, mỗi đường cong theo các giá trị q đều có xu hướng đi lên cho thấy mức độ đan rối tăng mạnh. Do đó chúng tôi kết luận rằng, trạng thái hai mode kết hợp cặp thêm hai cặp photon phụ thuộc mạnh vào tham số q và biên độ kết hợp r . Như vậy TPPA-PCS là trạng thái đan rối khi chọn giá trị tham số q phù hợp, trong miền r nhất định, theo điều kiện (13) của Hillery – Zubairy.

4. TÍNH CHẤT LÁI LƯỢNG TỬ

Lái lượng tử (Quantum Steering) là một dạng tương quan lượng tử trung gian giữa đan rối và bất định xứ Bell. Nó cho phép một bên thực hiện các phép đo lên phần của hệ bị rối và suy ra trạng thái của phần hệ ở xa mà không cần thực hiện bất kỳ phép đo nào. Khái niệm này ban đầu bị nhầm lẫn với đan rối, nhưng các nghiên cứu sau này, đặc biệt là của Werner, đã làm rõ rằng không phải mọi trạng thái rối đều có tính lái. Lái lượng tử có nhiều ứng dụng quan trọng trong thông tin lượng tử, bao gồm tính toán lượng tử, mã hóa lượng tử và viễn tải lượng tử.

4.1. Điều kiện lái lượng tử của Cavalcanti

Đối với trạng thái Fock, điều kiện lái lượng tử của Cavalcanti [11] cho trạng thái hai mode được biểu diễn dưới dạng:

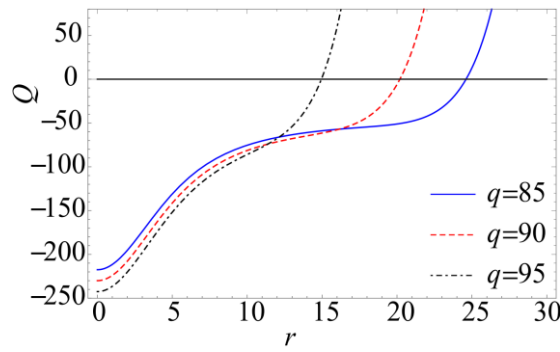
Điều kiện :

$$Q = |\langle ab \rangle|^2 - \langle N_a N_b \rangle - N_b / 2 > 0. \quad (15)$$

Từ các kết quả tính toán, hàm Q được viết dưới dạng tường minh như sau:

$$\begin{aligned}
 Q = & B_q^4 A_q^4 \left[\sum_{m=0}^{\infty} \frac{|\xi|^{2m+1} (m+2)(m+3)(m+q+2)(m+q+3)}{m!(m+q)!} \right]^2 \\
 & - B_q^2 A_q^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\xi|^{2n} (n+1)(n+2)^2 (n+q+1)(n+q+2)^2}{n!(n+q)!} \\
 & - \frac{1}{2} B_q^2 A_q^2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{|\xi|^{2m} (m+1)(m+2)(m+q+1)(m+q+2)^2}{m!(m+q)!}.
 \end{aligned} \tag{16}$$

Kết quả khảo sát tính chất lái lượng tử của trạng thái hai mode kết hợp cặp thêm hai cặp photon dựa vào hàm Q được cho trong Hình 2.



Hình 2. Đồ thị hàm Q theo r với giá trị q lần lượt là 85; 90; 95.

Sự phụ thuộc lái lượng tử ở Hình 2 được xét trong khoảng $0 < r \leq 30$ của Q ứng với các giá trị q tăng dần tương ứng $q = 85$ ứng với đường liền nét, $q = 90$ ứng với đường đứt nét, $q = 95$ ứng với đường gạch chấm. Từ đồ thị ta thấy, ứng với $q = 95$, khi $r < 14,94$ đồ thị không có tính chất lái, khi $r > 14,94$ tính chất lái bắt đầu xuất hiện trong miền r . Từ đó ta nhận thấy khi q càng lớn thì tính chất lái lượng tử xuất hiện trong miền r càng rộng. Mỗi đường cong đều có xu hướng đi lên cho thấy mức độ lái lượng tử tăng mạnh khi r tăng. Tuy nhiên với giá trị r bé thì vẫn có vùng không có tính chất lái. Như vậy trạng thái hai mode kết hợp cặp thêm hai cặp photon thỏa mãn điều kiện (15) của Cavalcanti.

4.2. Điều kiện lái lượng tử của EPR

Các điều kiện lái EPR [1,2] của một trạng thái, đặc trưng cho hai mode a và b được xác định thông qua các bất đẳng thức sau:

Điều kiện 1:

$$L_1 = |\langle ab \rangle|^2 - \langle N_a \rangle \left(\langle N_b \rangle + \frac{1}{2} \right) > 0. \tag{17}$$

Điều kiện 2:

$$L_2 = |\langle ab \rangle|^2 - \langle N_b \rangle \left(\langle N_a \rangle + \frac{1}{2} \right) > 0. \quad (18)$$

Đối với trạng thái hai mode, mode a có thể lái mode b khi điều kiện 1 được thỏa mãn hoặc ngược lại khi điều kiện 2 được thỏa mãn. Từ các kết quả tính toán ở (9), (10) và (11), các hàm L_1 , L_2 được xác định dưới dạng tường minh như sau:

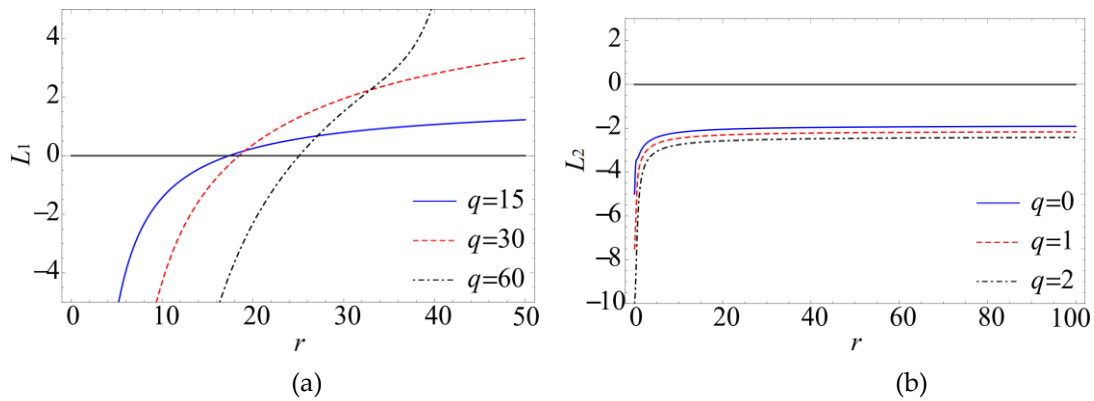
$$L_1 = B_q^4 A_q^4 \left[\sum_{m=0}^{\infty} \frac{|\xi|^{2m+1} (m+2)(m+3)(m+q+2)(m+q+3)}{m!(m+q)!} \right]^2 - \left(B_q^2 A_q^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\xi|^{2n} (n+1)(n+2)^2 (n+q+1)(n+q+2)}{n!(n+q)!} \right) \quad (19)$$

$$\left(B_q^2 A_q^2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{|\xi|^{2m} (m+1)(m+2)(m+q+1)(m+q+2)^2}{m!(m+q)!} + \frac{1}{2} \right).$$

$$L_2 = B_q^4 A_q^4 \left[\sum_{m=0}^{\infty} \frac{|\xi|^{2m+1} (m+2)(m+3)(m+q+2)(m+q+3)}{m!(m+q)!} \right]^2 - \left(B_q^2 A_q^2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{|\xi|^{2m} (m+1)(m+2)(m+q+1)(m+q+2)^2}{m!(m+q)!} \right) \quad (20)$$

$$\left(B_q^2 A_q^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\xi|^{2n} (n+1)(n+2)^2 (n+q+1)(n+q+2)}{n!(n+q)!} + \frac{1}{2} \right).$$

Kết quả khảo sát tính chất lái lượng tử của trạng thái hai mode kết hợp cặp thêm hai cặp photon dựa vào hàm L_1 và L_2 được cho trong hình 3.



Hình 3. Các đồ thị hàm L_1 và L_2 phụ thuộc vào biên độ kết hợp r và tham số q . Ở hình (a), các đồ thị tương ứng với điều kiện 1 với giá trị q lần lượt là 15; 30; 60. Ở hình (b), các đồ thị tương ứng với điều kiện 2 với giá trị q lần lượt là 0; 1; 2.

Sự phụ thuộc lái lượng tử của hình (3a) xét trong khoảng $0 < r \leq 50$ ứng với các giá trị q tăng dần tương ứng $q = 15$ ứng với đường liền nét, $q = 30$ ứng với đường đứt nét, $q = 60$ ứng với đường gạch chấm. Từ đồ thị ta thấy, ứng với $q = 15$ khi $r > 17,36$ tính chất lái bắt đầu xuất hiện trong miền r . Hơn nữa khi r càng tăng, mỗi đường cong theo các giá trị q đều có xu hướng đi lên cho thấy mức độ lái lượng tử tăng mạnh. Do đó, trạng thái hai mode kết hợp cặp thêm hai cặp photon phụ thuộc vào tham số q và miền r . Như vậy, trạng thái hai mode kết hợp cặp thêm hai cặp photon có tính chất lái lượng tử theo điều kiện 1 của EPR, nghĩa là mode a lái được mode b .

Sự phụ thuộc tính lái lượng tử của hình (3b) xét trong khoảng $0 < r \leq 100$ ứng với các giá trị q tăng dần tương ứng $q = 0$ ứng với đường liền nét, $q = 1$ ứng với đường đứt nét, $q = 2$ ứng với đường gạch chấm. Từ đồ thị ta thấy L_2 luôn âm trong mọi miền $0 < r \leq 100$. Vậy trạng thái hai mode kết hợp cặp thêm hai cặp photon lên các mode không có tính chất lái lượng tử theo điều kiện 2 của EPR, mode b không lái được mode a .

Sau khi xét các điều kiện lái lượng tử của Cavalcanti và điều kiện lái lượng tử của EPR, trạng thái hai mode kết hợp cặp thêm hai cặp photon thỏa mãn điều kiện 2 của Cavalcanti và mode a lái mode b theo điều kiện lái lượng tử của EPR. Như vậy, theo các điều kiện mà tôi khảo sát, trạng thái hai mode kết hợp cặp thêm hai cặp photon có tính chất lái lượng tử.

5. KẾT LUẬN

Trong nghiên cứu này, chúng tôi đã tập trung vào việc nghiên cứu trạng thái kết hợp cặp và xây dựng được trạng thái hai mode kết hợp cặp được tạo thành bằng phương pháp thêm hai cặp photon. Để đánh giá một số tính chất phi cổ điển của trạng thái mới này, điều kiện xét tính đan rối của Hillery – Zubairy cùng các điều kiện xét tính lái lượng tử của Cavalcanti và EPR đã được giới thiệu và áp dụng.

Kết quả thu được khi áp dụng điều kiện đan rối của Hillery – Zubairy cho thấy trạng thái hai mode kết hợp cặp thêm hai cặp photon thể hiện rõ ràng tính đan rối. Khi tiếp tục khảo sát bằng các điều kiện lái lượng tử của Cavalcanti và EPR, các phân tích lý thuyết và kết quả tính toán (kết hợp với đồ thị minh họa) đã chỉ ra rằng, trạng thái đang xét không những có tính chất đan rối mà còn có tính chất lái lượng tử, trong đó mode a có thể lái được mode b . Phát hiện này mang ý nghĩa quan trọng, đồng thời khẳng định rằng có thể tồn tại những trạng thái lượng tử vừa có tính chất đan rối vừa có tính chất lái lượng tử, một yếu tố then chốt trong các ứng dụng của thông tin lượng tử.

Tiềm năng phát triển của bài báo là rất lớn. Nghiên cứu không chỉ dừng lại ở việc khảo sát hệ hai mode mà hoàn toàn có thể mở rộng sang hệ đa mode phức tạp hơn. Bên cạnh đó, việc thêm hai cặp photon có thể được khái quát hóa thành thêm photon và bớt

photon trên các mode, mở ra khả năng khám phá các trạng thái lượng tử mới. Mục tiêu hướng tới là tìm ra những trạng thái sở hữu tính chất đan rối và tính chất lái lượng tử mạnh mẽ hơn, qua đó nâng cao khả năng ứng dụng của chúng trong các giao thức thông tin lượng tử tiên tiến như viễn tải lượng tử. Nếu có điều kiện thuận lợi, chúng tôi mong muốn tiếp tục đi sâu nghiên cứu và khai thác những hướng phát triển đầy hứa hẹn này trong tương lai.

LỜI CẢM ƠN

Nghiên cứu này được tài trợ bởi Bộ Giáo dục và Đào tạo thông qua đề tài khoa học và công nghệ cấp Bộ, mã số: B2025-DHH-03.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1]. Einstein A., Podolsky B. and Rosen N. (1935). Can quantum- mechanical description of physical reality be considered complete?, *Phys. Rev.*, Vol. 47(10), pp. 777-780.
- [2]. Duc T.M. et al (2024). Enhancing quantum features and teleportation fidelity of two – mode non – Gaussian states using conditional measurements, *Laser Physics Letter*, Vol. 21, pp. 035205 (1-12).
- [3]. Michal H., Pawel H. and Pyszard H. (1996). Separability of mixed states: necessary and sufficient conditions, *Physics Letter A*, Vol. 223, pp. 1.
- [4]. Peres A. (1996). Seperability criterion for density matrices, *Physical Review Letters*, Vol. 77, pp. 1413-1415.
- [5]. Pawel H. (1997). Seperability criterion and inseparable mixed states with positive partial transposition, *Physics Letter A*, Vol. 232, pp. 333-339.
- [6]. Braustein S.L. and Looock P. V. (2005). Quantum information with continuos variables, *Review of modern physics*, Vol. 77, pp. 513-577.
- [7]. Hillery M. and Zubairy M. S. (2006). Entanglement Conditions for Two - Mode States: application, *Physical Review A*, Vol. 74, pp. 032333(1-7).
- [8]. Nha H. and Kim J. (2006). Entanglement criteria via the uncertainty relations in SU (2) and SU (1,1) algebras: Detection of non – Gaussian entangled states, *Physics Review A*, Vol. 74, pp. 012317(1-7).
- [9]. Bowen W., Schnabel R., Lam P. and Ralph T. (2003). An experimental investigation of criteria for continuous variable entanglement, *Physical Review Letter*, Vol. 90, pp. 043601(1-4).
- [10]. Wiseman H., Jones S., and Doherty A. (2007). Steering, entanglement, nonlocality, and the Einstein – Podolsky Rosen paradox, *Physical Review Letter*, Vol. 98, pp. 140402(1-4).
- [11]. Cavalcanti E. G., He Q. Y., Reid M. D., and Wiseman H. M. (2011). Unified criteria for multipartite quatum nonlocality, *Physics Review A*, Vol. 84, pp. 032115(1-8).

- [12]. Kalaga J. K. and Leonski W. (2018). Einstein-Podolsky steering and coherence in the family of entangled three-qubit state, *Physics Review A*, Vol. 97, pp. 042110(1-12).
- [13]. Agarwal GS. (1986). Generation of pair coherent states and squeezing via the competition of four-wave mixing and amplified spontaneous emission, *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 57(7), pp. 827-830.
- [14]. Agarwal GS. (1988). Nonclassical statistics of fields in pair coherent states, *Journal of the Optical Society of America B*, Vol. 5, pp. 1940-1947.
- [15]. Chuong H. S., Trung H. N. and Duc T. M. (2022). Non-classical properties of photon-added-and-subtracted two-mode pair coherent state, *Hue University Journal of Science: Natural Science*, Vol. 131, No. 1A, pp. 75-83.
- [16]. Duc T. M., Dat T. Q. and Chuong H. S. (2020). Quantum entanglement and teleportation in superposition of multiple-photon-added two-mode squeezed vacuum state, *International Journal of Modern Physics B*, Vol. 34, No. 25, pp. 2050223(1-9).
- [17]. Chuong H. S. and Duc T. M. (2022). Sum squeezing, entanglement and quantum teleportation of the superposition of photon-added pair coherent state, *J. Phys.: Conf. Ser.* Vol. 2269, pp. 012003.
- [18]. Chuong H. S. and Duc T. M. (2023). Enhancement of non-Gaussianity and nonclassicality of pair coherent states by superposition of photon addition and subtraction, *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* Vol. 56, pp. 205401 (1-10).
- [19]. Dat T. Q., Chuong H. S., Hung D. V. and Duc T. M. (2022). Higher-order nonclassicality in superposition of three-mode photon – added trio coherent states, *Physics*, Vol. 32, No. 2, pp. 141-155.
- [20]. Duc T. M., Chuong H. S. and Dat T. Q. (2021). Detecting nonclassicality and non-Gaussianity by the Wigner function and quantum teleportation in photon-added-and-subtracted two modes pair coherent state, *Journal of Computational Electronics*, Vol. 20, pp. 2124-2134.
- [21]. Thanh L. T. H., Chuong H. S., Dat T. Q. and Duc T. M. (2023). Enhancement of dynamical entanglement in a dispersive two-mode Jaynes–Cummings model via superposition of photon-added pair coherent state, *Laser Phys. Lett.* Vol. 20, pp. 075203 (1-10).

STUDY ON ENTANGLEMENT AND QUANTUM STEERING PROPERTIES BASED ON PAIR COHERENT STATES USING THE TWO-PAIR-PHOTON ADDITION METHOD

Ho Sy Chuong^{1*}, Nguyen Phuong Uyen¹, Nguyen Thi Thu Thuy¹,
Le Thi Hong Thanh², Truong Minh Duc³

¹Dong Nai University

²Quang Nam University

³University of Education, Hue University

*Email: hosichuong@gmail.com

ABSTRACT

In this study, we employ the two-pair-photon addition technique on both modes of a pair coherent state (PCS) to generate the two-pair-photon-added pair coherent state (TPPA-PCS). The entanglement properties of the state are analyzed using the Hillery entanglement criterion. The results reveal that the TPPA-PCS exhibits entanglement when the coherent amplitude is not too small. Furthermore, the quantum steering properties of the TPPA-PCS are examined in detail. The analysis shows that the TPPA-PCS satisfies the quantum steering condition according to the Cavalcanti criterion and demonstrates one-way quantum steering, in which mode a can steer mode b according to the EPR steering criterion.

Keywords: Quantum steering, Quantum entanglement, Pair coherent states, Two-pair-photon-added pair coherent States.



Hồ Sỹ Chương sinh ngày 04/02/1985 tại Quảng Trị. Ông tốt nghiệp cử nhân chuyên ngành Sư phạm Vật lý, tại trường Đại học Sư phạm, Đại học Huế, năm 2009; tốt nghiệp thạc sĩ chuyên ngành Vật lý lý thuyết và Vật lý toán năm 2012 tại trường Đại học Sư phạm, Đại học Huế; nhận học vị tiến sĩ năm 2023, chuyên ngành Vật lý lý thuyết và Vật lý toán, tại trường Đại học Sư phạm, Đại học Huế. Ông công tác tại Khoa Sư phạm khoa học tự nhiên, trường Đại học Đồng Nai, từ năm 2013.

Lĩnh vực nghiên cứu: Quang học lượng tử, Thông tin lượng tử.



Nguyễn Phương Uyên sinh ngày 17/10/2003 tại Đồng Nai. Bà tốt nghiệp cử nhân chuyên ngành Sư phạm Vật lý, tại trường Đại học Đồng Nai năm 2025.

Lĩnh vực nghiên cứu: Vật lý lý thuyết



Nguyễn Thị Thu Thủy sinh ngày 26/04/1988 tại Quảng Trị. Bà tốt nghiệp cử nhân chuyên ngành Sư phạm Vật lý, tại trường Đại học Sư phạm, Đại học Huế, năm 2010; tốt nghiệp thạc sĩ chuyên ngành Lý luận và Phương pháp dạy học bộ môn Vật lý năm 2013 tại trường Đại học Sư phạm, Đại học Huế. Bà công tác tại Khoa Sư phạm khoa học tự nhiên, trường Đại học Đồng Nai, từ năm 2016.

Lĩnh vực nghiên cứu: Phương pháp dạy học Vật lý, Vật lý lý thuyết.



Lê Thị Hồng Thanh sinh ngày 22/7/1983 tại Đà Nẵng. Bà tốt nghiệp cử nhân chuyên ngành Sư phạm Vật lý, tại trường Đại học Sư phạm, Đại học Huế, năm 2006; tốt nghiệp thạc sĩ chuyên ngành Vật lý lý thuyết và Vật lý toán năm 2009 tại trường Đại học Sư phạm, Đại học Huế; nhận học vị tiến sĩ năm 2023, chuyên ngành Vật lý lý thuyết và Vật lý toán, tại trường Đại học Sư phạm, Đại học Huế. Bà công tác tại Phòng ĐT & CTSV trường ĐH Quảng Nam.

Lĩnh vực nghiên cứu: Quang học lượng tử, Thông tin lượng tử.



Trương Minh Đức sinh ngày 31/10/1971 tại Quảng Trị. Ông tốt nghiệp cử nhân chuyên ngành Sư phạm Vật lý, tại trường Đại học Sư phạm, Đại học Huế, năm 1993; tốt nghiệp thạc sĩ chuyên ngành Vật lý lý thuyết và Vật lý toán năm 2001 tại Viện Vật lý, Hà Nội; nhận học vị tiến sĩ năm 2007, chuyên ngành Vật lý lý thuyết và Vật lý toán, tại trường Đại học Sư phạm Hà Nội. Ông công tác tại Khoa Vật lý, Trường Đại học Sư phạm, Đại học Huế từ năm 1994.

Lĩnh vực nghiên cứu: Quang học lượng tử, Thông tin lượng tử.